

Equidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie

Barbara SCHAPIRA

*MAPMO, Université d'Orléans, Rue de Chartres,
BP 6759, 45067 Orléans cedex 2, France
schapira@labomath.univ-orleans.fr*

1 février 2008

Résumé

Dans ce travail, nous montrons des propriétés d'équidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie à courbure négative variable. Si la surface est hyperbolique, nous en déduisons un résultat d'équidistribution des orbites du flot horocyclique en volume infini.

Introduction

Cet article a pour propos essentiel d'étudier l'équidistribution des orbites du flot horocyclique d'une surface hyperbolique, lorsqu'elle est de volume infini.

Rappelons que dans le cas d'une surface compacte S , le flot horocyclique $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur le fibré unitaire tangent $T^1\tilde{S}$ est uniquement ergodique (Furstenberg [12]) et, en particulier, toutes les orbites du flot horocyclique s'équidistribuent vers l'unique probabilité invariante : la mesure de Liouville. Si S n'est plus compacte, mais seulement de volume fini, les orbites périodiques donnent lieu à d'autres probabilités invariantes ergodiques [9], mais le résultat est essentiellement le même (Dani-Smillie [10]) : toute orbite non périodique s'équidistribue vers la mesure de Liouville. Ces résultats d'équidistribution ont été étendus par Marina Ratner à tous les flots unipotents sur les espaces G/Γ , où Γ est un réseau d'un groupe de Lie G .

En revanche, le cadre des espaces homogènes G/Γ de volume infini a été peu étudié, et nous nous intéressons ici au cas le plus simple d'une surface hyperbolique S de volume infini. Si S est réalisée comme le quotient \mathbb{H}/Γ , où \mathbb{H} est le demi-plan hyperbolique et $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est un groupe Fuchsien, son fibré unitaire tangent T^1S s'identifie à $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$, et la mesure de Haar sur $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ coïncide avec la mesure de Liouville sur T^1S . Celle-ci charge alors des points errants du flot horocyclique, et est en particulier non ergodique. Néanmoins, si S est supposée géométriquement finie (i.e. si Γ est de type fini), il existe une autre mesure invariante m à support dans l'ensemble non errant \mathcal{E} du flot horocyclique. Cette mesure est de masse totale infinie et ergodique pour le flot horocyclique [5], [18]. C'est l'unique mesure invariante ergodique distincte des probabilités invariantes induites par les orbites périodiques du flot horocyclique, quand il y en a.

Lorsque la surface est *convexe-cocompacte*, i.e. géométriquement finie sans cusps, une propriété d'équidistribution des orbites du flot horocyclique a été démontrée par Burger dans [5], à l'aide de méthodes analytiques précises, mais valides sous certaines conditions sur l'exposant critique de Γ . Nous nous intéressons ici au cas général d'une surface avec (ou sans) cusps, sans restriction sur l'exposant critique, dans lequel nous prouvons l'équidistribution par une méthode valide en courbure variable. Comme m est infinie, on ne peut espérer

un résultat classique d'équidistribution des moyennes, et nous allons énoncer un théorème de type quotient. (L'énoncé est à comparer avec le théorème quotient de Hopf [16], analogue en mesure infinie du théorème de Birkhoff.)

Théorème 4.4 *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie, et $u \in \mathcal{E} \subset T^1S$ un vecteur non errant et non périodique pour le flot horocyclique $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Alors pour toutes fonctions continues à support compact φ et ψ de T^1S dans \mathbb{R} , on a*

$$\frac{\int_{-t}^t \psi \circ h^s(u) ds}{\int_{-t}^t \varphi \circ h^s(u) ds} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi dm}{\int_{T^1S} \varphi dm} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

En fait, ce théorème est une reformulation d'un théorème plus général en courbure variable (Théorème 3.1), qui lui-même se déduit d'un théorème d'équidistribution d'autres moyennes, que nous allons décrire ci-dessous.

Soit donc S une surface géométriquement finie de courbure variable majorée par -1 . On sait qu'il existe une mesure importante sur T^1S , la mesure de Patterson-Sullivan m_{PS} , à support dans l'ensemble non errant Ω du flot géodésique. Par ailleurs, il n'y a plus alors de paramétrisation naturelle du flot horocyclique, mais simplement un feuilletage de T^1S en horocycles. Sur chaque feuille notée H^+ de ce feuilletage, on dispose d'une part d'une distance notée d_{H^+} , et d'autre part de la mesure conditionnelle $\mu_{H^+}^{ps}$ de la mesure de Patterson-Sullivan. Nous étudions dans ce cadre le comportement des moyennes

$$M_{r,u}(\psi) := \frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u,r))} \int_{B^+(u,r)} \psi(v) d\mu_{H^+}^{ps}(v),$$

où u est un vecteur fixé de la feuille H^+ et $B^+(u,r)$ la boule centrée en u de rayon r pour la distance d_{H^+} .

A priori, elles peuvent sembler sans rapport avec les moyennes sur les orbites du flot horocyclique du théorème 4.4 ci-dessus. Mais d'une part en courbure constante, pour tout vecteur u , la boule $B^+(u,r)$ coïncide avec l'orbite $\{h^s(u), |s| < r\}$.

D'autre part, la notion clé utilisée ici est non pas celle de mesure invariante par le flot horocyclique, mais plutôt celle de *mesure transverse invariante par holonomie*. La classification des mesures invariantes a son analogue dans ce cadre : en dehors des mesures transverses invariantes induites par les feuilles compactes, il existe une unique mesure transverse invariante, notée $\mu = \{\mu_T\}$, à support dans l'ensemble non errant du feuilletage horocyclique [18]. La mesure m du théorème 4.4 est le « produit » de cette mesure μ par la mesure de Lebesgue dt le long des orbites du flot horocyclique, alors que la mesure de Patterson-Sullivan est le produit de cette même mesure μ par la famille de mesures conditionnelles $\{\mu_{H^+}^{ps}\}$.

Afin d'étudier les moyennes $M_{r,u}$, nous aurons besoin d'une condition de divergence des bouts cuspidaux de S notée (1) qui est vérifiée en courbure constante, et qui impliquera en particulier que la mesure de Patterson-Sullivan m_{PS} est finie. Nous la supposons donc normalisée en une probabilité sur T^1S . Notre résultat est alors :

Théorème 2.1 *Soit S une surface géométriquement finie de courbure majorée par -1 dont les bouts cuspidaux vérifient la condition (1). Soit u un vecteur de T^1S dont la feuille $H^+(u)$ est non errante (pour le feuilletage horocyclique) et non compacte. Alors pour toute fonction continue à support compact $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u,r))} \int_{B^+(u,r)} \psi(v) d\mu_{H^+}^{ps}(v) \longrightarrow \int_{T^1S} \psi dm_{PS} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$

L'organisation du texte est la suivante : le paragraphe 1 est consacré aux préliminaires sur les surfaces géométriquement finies. Le théorème 2.1 est prouvé au paragraphe 2. Nous

en déduisons (section 3) un résultat d'équidistribution de moyennes généralisées en courbure variable (théorème 3.1), et pour finir nous expliquons au paragraphe 4 pourquoi le théorème 4.4 en est une simple reformulation en courbure constante.

Je remercie M. Burger pour avoir posé une question motivant les résultats de cet article, et commenté une version préliminaire de ce travail. Il a suggéré l'approche consistant à étudier d'abord l'équidistribution de moyennes pour d'autres mesures que la mesure de Lebesgue, approche qu'il avait déjà considérée avec A. Fisher pour traiter cette question (communication personnelle) .

1 Préliminaires

1.1 Surfaces géométriquement finies en courbure négative variable

Soit S une surface riemannienne à courbure sectionnelle majorée par -1 . On notera \tilde{S} son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(S)$ son groupe fondamental, T^1S son fibré unitaire tangent, et $\pi : T^1S \rightarrow S$ la projection canonique. Soit d la distance riemannienne sur S et \tilde{S} .

Le *bord à l'infini* $\partial\tilde{S}$ de \tilde{S} permet de compactifier \tilde{S} en $\overline{S} = \tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$. Le groupe Γ agit sur \tilde{S} par isométries, et sur $\partial\tilde{S}$ par homéomorphismes. Si $o \in \tilde{S}$, l'ensemble limite $\Lambda_\Gamma := \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o \subset \partial\tilde{S}$ de Γ est aussi le plus petit fermé Γ -invariant de $\partial\tilde{S}$.

Le *cocycle de Busemann* est la fonction continue définie pour tout $\xi \in \partial\tilde{S}$ et $(x, y) \in \tilde{S}^2$ par $\beta_\xi(x, y) := \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z) = "d(x, \xi) - d(y, \xi)"$. Un *horocycle* $H \subset \tilde{S}$ centré en ξ est une ligne de niveau de l'application $y \rightarrow \beta_\xi(y, o)$. Une *horoboule* $\mathcal{H} \subset \tilde{S}$ centrée en ξ est un sous-ensemble $\mathcal{H} = \{y \in \tilde{S}, \beta_\xi(y, o) \leq C\}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Si $u \in T^1\tilde{S}$, notons u^+ et u^- les extrémités dans $\partial\tilde{S}$ de la géodésique définie par u , et $\partial^2\tilde{S} := \partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} \setminus \{(\xi, \xi), \xi \in \partial\tilde{S}\}$. Le fibré unitaire tangent $T^1\tilde{S}$ est homéomorphe à $\partial^2\tilde{S} \times \mathbb{R}$ via l'application $u \mapsto (u^-, u^+, \beta_{u^-}(u, o))$. L'ensemble non errant $\Omega \subset T^1S$ du flot géodésique $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de S (agissant sur T^1S) s'identifie (Eberlein, [11]) à l'ensemble des vecteurs $v \in T^1S$ dont un relevé $\tilde{v} \in T^1\tilde{S}$ définit une géodésique dont les deux extrémités sont dans Λ_Γ .

Un point ξ de l'ensemble limite Λ_Γ est dit *radial* s'il existe un point $o \in \tilde{S}$ et une infinité de points de l'orbite Γo à distance bornée du rayon $[o\xi)$. Si $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est l'unique point fixe d'une isométrie parabolique de Γ , il est dit *parabolique*. Le stabilisateur dans Γ d'un tel point sera appelé un *sous-groupe parabolique*. Nous noterons Λ_R (resp. Λ_P) l'ensemble des points limite radiaux (resp. paraboliques) de Λ_Γ .

Le groupe Γ est dit *cocompact* si S est compacte, *convexe-cocompact* si Ω est compact, et *géométriquement fini* si $\Lambda_\Gamma = \Lambda_R \cup \Lambda_P$. Si Γ est géométriquement fini, la projection $\pi(\Omega)$ sur S de l'ensemble non errant $\Omega \subset T^1S$ du flot géodésique se décompose en l'union d'une partie compacte C_0 , et d'un nombre fini de *cusps* C_i . Cette caractérisation de la finitude géométrique est classique sur des variétés à courbure pincée (voir Bowditch [3]), mais reste vraie en courbure seulement majorée par -1 (voir Roblin [18]). Si S est hyperbolique, Γ est géométriquement fini si et seulement s'il est de type fini.

L'*exposant critique* d'un sous-groupe G de Γ est défini comme

$$\delta_G = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \# \{g \in G, d(o, go) \in [T, T+1[\}.$$

C'est aussi l'exposant critique de la série de Poincaré de G

$$\sum_{g \in G} e^{-sd(o, go)}.$$

En courbure constante, le fait que Γ soit géométriquement fini implique qu'il est *divergent*, i.e. que la série ci-dessus (pour $G = \Gamma$) est divergente en $s = \delta_\Gamma$ (Sullivan [22]). Ceci est faux

en général en courbure variable, et nous imposerons dans toute la suite l'hypothèse suivante. Pour tout sous-groupe parabolique Π de Γ , il existe une constante $D \geq 1$ telle que

$$\frac{1}{D} e^{\delta_\Pi T} \leq \# \{ p \in \Pi, d(o, po) \leq T \} \leq D e^{\delta_\Pi T} \quad (1)$$

Cette hypothèse est vérifiée lorsque les cusps de S sont isométriques aux cusps d'une surface localement symétrique à courbure négative (voir [20]).

Elle implique que tout sous-groupe parabolique Π de Γ est divergent. Les travaux de Dal'bo, Otal et Peigné [8] permettent d'en déduire un grand nombre de renseignements, dont certains sont résumés dans la proposition suivante :

Proposition 1.1 (Dal'bo-Otal-Peigné [8]) *Soit Γ un groupe géométriquement fini, dont tout sous-groupe parabolique Π est divergent. Alors $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$, et le groupe Γ est lui-même divergent.*

Remarque 1.2 Ce résultat n'est en fait démontré dans [8] que dans le cadre des variétés géométriquement finies à courbure négative pincée, cas dans lequel la décomposition de S en l'union des cusps et de la partie compacte est classique. Mais Roblin [18] a montré que pour obtenir cette décomposition, il suffit que la courbure soit majorée par -1 , de sorte que le résultat ci-dessus est vrai sous cette hypothèse.

Nous verrons une autre conséquence tirée de [8] de cette hypothèse au paragraphe suivant.

1.2 Feuilletage horocyclique

Les horocycles de \tilde{S} se relèvent à $T^1\tilde{S}$ de la manière suivante. Si H est un horocycle centré en $\xi \in \partial\tilde{S}$, définissons $H^+ \subset T^1\tilde{S}$ comme l'ensemble des vecteurs $v \in T^1\tilde{S}$ dont le point base est sur H et tels que $v^- = \xi$. Si $u \in T^1\tilde{S}$, nous noterons $H(u)$ l'horocycle de \tilde{S} centré en u^- et passant par le point base de u , et $H^+(u)$ son relevé à $T^1\tilde{S}$:

$$H^+(u) = \{ v \in T^1\tilde{S}, v^- = u^- \text{ et } \beta_{v^-}(u, v) = 0 \}.$$

Les horocycles de $T^1\tilde{S}$ coïncident avec les variétés fortement instables du flot géodésique, nous les appellerons donc *horocycles fortement instables*. Ils forment un feuilletage (trivial) de $T^1\tilde{S}$ de dimension 1 et de codimension 2. Ils passent au quotient sur T^1S en les variétés fortement instables du flot géodésique de T^1S , toujours notées $H^+(u)$ pour simplifier. Sur T^1S , ce feuilletage n'est plus trivial, nous l'appellerons *feuilletage fortement instable*, noté \mathcal{W}^{su} .

Rappelons quelques notions sur les feuilletages. Si $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est une carte de ce feuilletage, B sera appelée une *boîte*. Une *plaque* de B est un ensemble $P = \varphi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R})$, et une *transversale* T de B est un ensemble de la forme $T = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{t\})$. Si P est une plaque et T une transversale de B , nous noterons $B = T \times P$. Si $u \in B$, nous noterons $P_u \subset H^+(u)$ sa plaque dans B .

Vue la structure produit de $T^1\tilde{S} \simeq \partial^2\tilde{S} \times \mathbb{R}$, une famille naturelle de transversales au feuilletage fortement instable de $T^1\tilde{S}$ est l'ensemble des variétés faiblement stables $\tilde{W}^s(u)$ du flot géodésique \tilde{g} . Elles sont définies par

$$\tilde{W}^s(u) := \{ v \in T^1\tilde{S}, v^+ = u^+ \}.$$

Elles passent au quotient sur T^1S en les variétés faiblement stables $W^s(u)$ du flot géodésique g , et on pourra prendre pour transversales des petits ouverts de ces variétés stables.

Une *application d'holonomie* $\zeta : T \rightarrow T'$ entre deux transversales T et T' d'une même boîte B est l'homéomorphisme qui suit les plaques de B de T dans T' . Plus généralement, on appelle application d'holonomie une composée (au sens d'un pseudogroupe, [6]) de telles applications.

Une *mesure transverse* au feuilletage \mathcal{W}^{su} est une collection de mesures de Radon $\nu = \{\nu_T\}$ sur les transversales T au feuilletage. Elle est dite *invariante par holonomie* si pour toute application d'holonomie $\zeta : T \rightarrow T'$,

$$\zeta_* \nu_T = \nu_{T'}.$$

Notons que toute feuille fermée H^+ du feuilletage induit une mesure transverse invariante canonique ν^{H^+} définie sur toute transversale T de la manière suivante :

$$\nu_T^{H^+} := \sum_{t \in T \cap H^+} \delta_t.$$

Le *support* d'une mesure transverse $\nu = \{\nu_T\}$ est l'union des supports des mesures ν_T , T décrivant toutes les transversales à \mathcal{W}^{su} . Si ν est invariante par holonomie, c'est un ensemble saturé du feuilletage (i.e. une union de feuilles).

On appelle *système de Haar* une collection de mesures $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$ sur les feuilles H^+ du feuilletage, qui vérifient la condition de continuité suivante. Pour toute boîte $B = T \times P$ relativement compacte, l'application ci-dessous est continue :

$$t \in T \rightarrow \alpha_{H^+}(P_t) \quad (2)$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la feuille H^+ considérée, nous noterons α au lieu de α_{H^+} .

La mesure riemannienne induite sur le feuilletage, notée $\lambda = \{\lambda_{H^+}\}$, est un exemple de système de Haar.

La donnée d'une mesure transverse ν invariante par holonomie et d'un système de Haar α permet de définir une mesure, notée $\nu \circ \alpha$, sur tout $T^1 S$. On la définit sur toute boîte $B = T \times P$ par

$$\nu \circ \alpha(B) := \int_T \alpha(P_t) d\nu_T(t), \quad (3)$$

l'invariance par holonomie de ν impliquant que l'expression ci-dessus ne dépend pas du choix de la transversale T .

La *mesure de Patterson-Sullivan* sur $T^1 S$ est un exemple de tel produit. Rappelons qu'on la construit à partir de la mesure Γ -invariante \tilde{m}_{PS} sur $T^1 \tilde{S} = \partial^2 \tilde{S} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$d\tilde{m}_{PS}(v) = \exp \delta_\Gamma \beta_{v^+}(o, \pi(v)) \exp \delta_\Gamma \beta_{v^-}(o, \pi(v)) d\nu_o(v^+) d\nu_o(v^-) dt,$$

où ν_o est une mesure sur $\partial \tilde{S}$ de support inclus dans l'ensemble limite Λ_Γ , dite *mesure de Patterson*. Lorsque Γ est divergent (ce qui est assuré par (1)), il existe une unique telle mesure sur $\partial \tilde{S}$, de sorte que cette construction donne une unique mesure m_{PS} sur $T^1 S$, appelée la mesure de Patterson-Sullivan.

La formule ci-dessus généralise l'expression donnée par Sullivan [21] en courbure constante égale à -1 :

$$d\tilde{m}_{PS}(v) = \frac{d\nu_o(v^+) d\nu_o(v^-) dt}{|v^- - v^+|^{2\delta_\Gamma}}.$$

On définit un système de Haar en considérant les mesures conditionnelles de \tilde{m}_{PS} sur les horocycles fortement instables :

$$d\tilde{\mu}_{H^+}^{ps}(v) = \exp \delta_\Gamma \beta_{v^+}(o, \pi(v)) d\nu_o(v^+)$$

Cette famille est Γ -invariante au sens où $\gamma_* \tilde{\mu}_{H^+}^{ps} = \tilde{\mu}_{\gamma H^+}^{ps}$, et passe donc au quotient en une famille de mesures $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$ sur les feuilles H^+ de \mathcal{W}^{su} . La propriété de continuité (2) est démontrée dans [18] (Lemme 1.16), ce qui assure que c'est bien un système de Haar.

Cette famille de mesures vérifie la propriété immédiate et essentielle d'être dilatée quand on la pousse par le flot :

$$\mu_{g^t H^+}^{ps} = e^{\delta_\Gamma t} g^t_* \mu_{H^+}^{ps}. \quad (4)$$

D'autre part, on sait aussi que la mesure ν_o utilisée ci-dessus a pour support Λ_Γ , de sorte que chacune des mesures $\mu_{H^+}^{ps}$ ci-dessus a pour support l'ensemble des vecteurs v de H^+ , tels que $v^+ \in \Lambda_\Gamma$. Si H^+ est centrée dans Λ_Γ , ce support n'est rien d'autre que $H^+ \cap \Omega$.

De la même manière, si $T = W^s(v)$ est une transversale au feuilletage, la formule

$$d\tilde{\mu}_T(w) = \exp(-\delta_\Gamma t) d\nu_o(w^-) dt$$

définit une mesure transverse invariante par holonomie et par Γ , qui passe donc au quotient en une mesure transverse invariante par holonomie pour le feuilletage \mathcal{W}^{su} , notée $\mu = \{\mu_T\}$.

Par construction de toutes ces mesures, il est clair que m_{PS} est le produit de cette mesure transverse μ et du système de Haar $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$ au sens de (3) ci-dessus.

Sous l'hypothèse (1), on a vu (proposition 1.1) que le groupe Γ est divergent et que pour tout sous-groupe parabolique Π de Γ , on a $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$. Des travaux de Dal'bo-Otal-Peigné [8], on déduit alors que la mesure de Patterson-Sullivan est finie.

La topologie des feuilles de \mathcal{W}^{su} est bien connue. Pour la décrire, introduisons l'ensemble $\mathcal{E} \subset T^1 S$ des vecteurs $v \in T^1 S$ dont un relevé \tilde{v} à $T^1 \tilde{S}$ vérifie $\tilde{v}^- \in \Lambda_\Gamma$. Il se décompose en une union disjointe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R \sqcup \mathcal{E}_P,$$

où \mathcal{E}_R (resp. \mathcal{E}_P) est l'ensemble des vecteurs tels que $\tilde{v}^- \in \Lambda_R$ (resp. $\tilde{v}^- \in \Lambda_P$). Remarquons que \mathcal{E}_P est l'ensemble des vecteurs *néativement divergents* par le flot géodésique, i.e. dont l'orbite $(g^{-t}u)_{t \geq 0}$ diverge dans un cusp de S , et \mathcal{E}_R est l'ensemble *néativement récurrent*, i.e. l'ensemble des vecteurs dont l'orbite $(g^{-t}u)_{t \geq 0}$ revient infiniment souvent dans un compact de S .

Théorème 1.3 (Dal'bo [7], Hedlund [14]) *Soit S une surface géométriquement finie à courbure majorée par une constante strictement négative. Alors :*

1. *Les horocycles inclus dans \mathcal{E}_R sont denses dans \mathcal{E} . En particulier, leur projection sur S revient infiniment souvent dans la partie compacte C_0 de la variété.*
2. *Les horocycles de \mathcal{E}_P sont compacts.*
3. *Les horocycles de $T^1 S \setminus \mathcal{E}$ sont fermés et plongés dans $T^1 S$.*

Par analogie avec le cas des flots, l'ensemble \mathcal{E} sera appelé *ensemble non errant du feuilletage horocyclique*.

Nos résultats reposent grandement sur le théorème suivant de classification des mesures transverses invariantes. Ce théorème a été prouvé par Dani [9] sur les surfaces hyperboliques de volume fini, par Burger [5] sur les surfaces hyperboliques convexes-cocompactes et par Roblin [18] dans le cas général en courbure variable.

Théorème 1.4 (Roblin, [18]) *Si S est une surface géométriquement finie de courbure au plus -1 dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie, alors les mesures transverses invariantes par holonomie et ergodiques sont de l'un des trois types suivants :*

1. *Une unique mesure $\mu = \{\mu_T\}$ de support \mathcal{E} telle que $\mu_T(T \cap \mathcal{E}_P) = 0$ pour toute transversale T .*
2. *Les mesures induites canoniquement par un horocycle compact de \mathcal{E}_P .*
3. *Les mesures induites par les horocycles (fermés) inclus dans $T^1 S \setminus \mathcal{E}$.*

En particulier, on en déduit que sans hypothèse d'ergodicité, il existe une unique mesure $\mu = \{\mu_T\}$ de support \mathcal{E} telle que $\mu_T(T \cap \mathcal{E}_P) = 0$ pour toute transversale T .

Remarque 1.5 En fait, le théorème 1.4 est démontré dans [18] sous l'hypothèse de non-arithméticité du spectre des longueurs, et c'est Dal'bo [7] qui a montré que cette hypothèse est satisfaite sur les surfaces. La même remarque s'applique au théorème 2.2 énoncé plus loin.

Pour finir, rappelons que sur chaque feuille H^+ du feuilletage de $T^1\tilde{S}$, on dispose d'une distance d_{H^+} , distance dite *de Hamenstädt* (voir [15]) et définie comme suit. Pour tous $(u, v) \in (H^+)^2$, si $x \in \tilde{S}$ est un point quelconque de la géodésique (u^+v^+) ,

$$d_{H^+}(u, v) = \exp \left(\frac{1}{2}\beta_{u^+}(x, u) + \frac{1}{2}\beta_{v^+}(x, v) \right)$$

Elles sont bien définies (car l'expression ci-dessus ne dépend pas de $x \in (u^+v^+)$), invariantes par isométries : pour tout γ , $d_{\gamma H^+}(\gamma u, \gamma v) = d_{H^+}(u, v)$, et poussées par le flot, elles vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$d_{\tilde{g}^t H^+}(\tilde{g}^t u, \tilde{g}^t v) = e^t d_{H^+}(u, v). \quad (5)$$

Nous noterons $B^+(u, r)$ une boule pour la distance d_{H^+} . La propriété d'invariance par Γ de ces distances fait que les boules passent au quotient en des ensembles qui seront encore notés $B^+(u, r)$.

2 Equidistribution des moyennes vers la mesure de Patterson-Sullivan

Les moyennes que nous considérons dans ce paragraphe sont définies sur de grandes boules à l'aide de la famille de mesures $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$ associées à la mesure de Patterson-Sullivan. Rappelons que nous omettons l'indice H^+ lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Plus précisément, si $u \in T^1S$ et $r > 0$, notons $M_{r,u}$ la probabilité sur $H^+(u)$ définie pour toute fonction continue à support compact $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi(v) d\mu^{ps}(v).$$

Si la feuille $H^+(u)$ est incluse dans \mathcal{E} , i.e. centrée dans l'ensemble limite Λ_Γ , rappelons que chaque mesure $\mu_{H^+}^{ps}$ est à support $H^+ \cap \Omega$. Autrement dit, si u est un vecteur de l'ensemble non errant \mathcal{E} du feuilletage horocyclique, pour tout $r > 0$, $M_{r,u}$ est une probabilité à support dans l'ensemble non errant Ω du flot géodésique.

Notons la propriété suivante, qui découle directement de la relation (4) vérifiée par μ^{ps} et de la propriété de dilatation des distances horosphériques (5). Pour tout $u \in T^1S$, tout $t \in \mathbb{R}$ et toute fonction $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$M_{r,u}(\psi) = M_{re^{-t}, g^{-t}u}(\psi \circ g^t) \quad (6)$$

Rappelons que sous l'hypothèse (1), la mesure de Patterson-Sullivan est finie, et on la suppose normalisée en une probabilité. Notre premier résultat est le suivant :

Théorème 2.1 *Soit S une surface de courbure au plus -1 géométriquement finie dont les cusps vérifient la condition (1). Alors pour tout $u \in \mathcal{E}_R \subset \mathcal{E}$ et toute fonction continue à support compact $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} M_{r,u}(\psi) = \int_{T^1S} \psi dm_{PS}$$

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous allons présenter deux preuves distinctes de ce résultat, l'une dans le cas d'une variété convexe-cocompacte, i.e. géométriquement finie sans cusps, où on obtiendra même une convergence uniforme en u à ψ fixée, et la seconde dans le cas général.

2.1 Preuve dans le cas convexe-cocompact

Si M est convexe-cocompacte, Ω est compact, et si u est un vecteur non errant du flot géodésique, les moyennes $(M_{r,u})_{r>0}$ sont à support compact.

La preuve repose sur deux faits indépendants, et reprend certains des arguments utilisés par Ellis et Perrizo dans [E-P]. Le premier fait est l'équidistribution des moyennes poussées par le flot : c'est un résultat général de Babillot (valable en toute dimension), provenant de la propriété de mélange de m_{PS} .

Théorème 2.2 (Babillot, [1]) *Soit S une surface géométriquement finie à courbure inférieure à -1 . Pour toute fonction $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, $u \in \Omega$ et $r > 0$ fixé, la suite de moyennes $(M_{r,u}(\psi \circ g^t))_{t>0}$ converge vers $\int_{T^1S} \psi dm_{PS}$ quand $t \rightarrow +\infty$.*

Le deuxième fait concerne l'équicontinuité de la famille de fonctions $\{u \rightarrow M_{r,u}(\psi \circ g^t), t \geq 0\}$.

Lemme 2.3 *Soit $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. La famille de fonctions $u \rightarrow M_{r,u}(\psi \circ g^t)$ est équicontinue en $t \geq 0$.*

Ce lemme est démontré dans [19], lemme 4.3, lorsque pour tout $u \in \Omega$, on a

$$\mu_{H^+}^{ps}(\partial B^+(u, 1)) = 0.$$

Cette condition sur le bord des boules horosphériques est satisfaite ici. En effet, elles sont de dimension 1, et donc leur bord comporte deux points. Comme par ailleurs la mesure de Patterson ν_o est sans atomes (voir [8]), la mesure $\mu_{H^+}^{ps}$ aussi, d'où le résultat.

Comme Ω est compact, le lemme ci-dessus implique que la famille d'applications $\{u \rightarrow M_{r,u}(\psi \circ g^t), t \geq 0\}$ est en fait uniformément équicontinue sur Ω . On en déduit que les moyennes $M_{r,u}(\psi \circ g^t)$ convergent uniformément en $u \in \Omega$ vers $\int_{T^1S} \psi dm_{PS}$.

On utilise alors la relation fondamentale (6) pour passer de la propriété d'équidistribution du théorème 2.2 à celle souhaitée du théorème 2.1. Plus précisément, si $\psi : T^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue fixée, et $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un $T \geq 0$, tel que pour tout $t \geq T$ et tout $u \in \Omega$, on a

$$\left| M_{r,u}(\psi \circ g^t) - \int_{T^1S} \psi dm_{PS} \right| \leq \varepsilon.$$

Maintenant, si $v \in \Omega$ et $t \geq T$, la relation (6) et l'inégalité ci-dessus appliquée à $u = g^{-t}v$ donnent

$$\left| M_{re^t,v}(\psi) - \int_{T^1S} \psi dm_{PS} \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci conclut la preuve du théorème 2.1.

2.2 Cas général

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas où S a des cusps. Il n'y a plus alors unicité d'une mesure transverse invariante par holonomie (voir le théorème 1.4). Nous donnons donc une preuve différente de la précédente, dont le principe est de montrer que toute valeur d'adhérence des probabilités $(M_{r,u})_{r>0}$, pour $u \in \mathcal{E}_R$, est égale à m_{PS} .

Le problème essentiel qui apparaît est la non-compactité de l'ensemble non-errant Ω du flot géodésique. L'étape cruciale de la preuve est alors le théorème ci-dessous (qui nécessite l'hypothèse (1)).

Théorème 2.4 ([20]) *Soit M une variété à courbure au plus -1 géométriquement finie dont les cusps vérifient la condition (1). Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et $C \subset T^1M$ un compact. Il existe un compact $K_{\varepsilon,C}$ de l'ensemble non errant Ω du flot géodésique, tel que pour tout vecteur u de $C \cap \mathcal{E}_R$ et tout $r > 0$, on a*

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon,C}) \geq 1 - \varepsilon$$

Ce résultat assure que pour tout vecteur u fixé de \mathcal{E}_R , les valeurs d'adhérence lorsque $r \rightarrow +\infty$ de $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ pour la topologie faible sont des probabilités à support dans Ω . Autrement dit, il n'y a pas de perte de masse due à la présence de cusps.

Le reste de la preuve réside dans les deux lemmes indépendants ci-dessous.

Lemme 2.5 *Si $u \in \mathcal{E}_R$, toute valeur d'adhérence m de $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ quand $r \rightarrow +\infty$ se décompose sous la forme $m = \nu \circ \mu^{ps}$, où ν est une mesure transverse invariante par holonomie, et μ^{ps} est le système de Haar associé à la mesure de Patterson-Sullivan.*

Ce lemme est le seul qui utilise le fait que S est une surface, et donc que les feuilles du feuilletage horocyclique sont de dimension 1.

Lemme 2.6 *Si $u \in \mathcal{E}_R$, toute valeur d'adhérence m de $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ quand $r \rightarrow +\infty$ vérifie $m(\mathcal{E}_P) = 0$.*

Des deux lemmes ci-dessus, on déduit que toute valeur d'adhérence des moyennes s'écrit $\nu \circ \mu^{ps}$, où ν est une mesure transverse invariante à support dans \mathcal{E} , et telle que pour toute transversale T , $\nu_T(\mathcal{E}_P \cap T) = 0$.

Le théorème 1.4 de classification des mesures transverses invariantes par holonomie et le lemme 2.6 impliquent alors $\nu = \mu$ (à une constante multiplicative près). Toute valeur d'adhérence de $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ est alors une probabilité de la forme $\text{cte } \mu \circ \mu^{ps} = \text{cte } m_{PS}$, et le fait que m_{PS} soit normalisée donne $\text{cte} = 1$. Ceci signifie exactement la convergence des moyennes vers la mesure de Patterson-Sullivan.

Démonstration du lemme 2.5: Définissons pour tout $r > 0$ une mesure transverse $\nu^r = \{\nu_T^r\}$ par

$$\nu_T^r := \frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} \sum_{t \in T \cap B^+(u, r)} \delta_t.$$

Soit m une valeur d'adhérence de la suite $(M_{r,u})_{r \geq 0}$. Il suffit de montrer qu'en restriction à toute boîte relativement compacte $B = T \times P$, la mesure m est de la forme voulue. Sur une telle boîte, on a

$$M_{r,u}(B) = \int_T d\nu_T^r(t) \int_{P_t} 1 d\mu^{ps} + R(B, T, r).$$

L'erreur commise $R(B, T, r)$ est due d'une part à des termes éventuellement oubliés dans l'intégrale sur T , correspondant aux $t \in T \cap H^+(u) \setminus B^+(u, r)$, tels que $\mu^{ps}(P_t \cap B^+(u, r)) > 0$, et d'autre part à des termes comptés en trop dans cette intégrale, les $t \in T \cap B^+(u, r)$ tels que $\mu^{ps}(P_t \cap B^+(u, r)) < \mu^{ps}(P_t)$. Chacun de ces termes est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} \sup_{t \in T} \mu^{ps}(P_t)$. De plus, le fait que les feuilles soient de dimension 1 et les boules $B^+(u, r)$ soient connexes implique qu'il y a au plus deux termes d'erreur. Finalement, on a

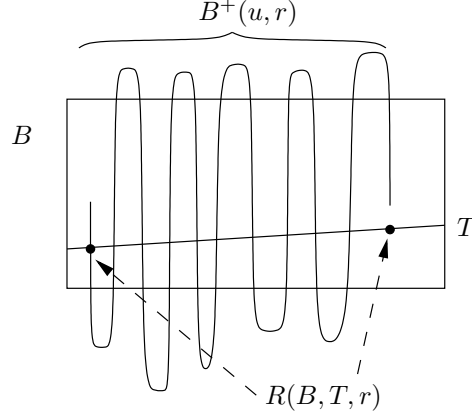
$$|R(B, T, r)| \leq \frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} 2 \sup_{t \in T} \mu^{ps}(P_t).$$

Fait 2.7 *Soit $u \in \mathcal{E}_R$. La quantité $\mu^{ps}(B^+(u, r))$ tend vers $+\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.*

En effet, comme $u^- \in \Lambda_R$, il existe une suite $t_k \rightarrow +\infty$ telle que $g^{-t_k}u$ est basé dans la partie compacte C_0 . Les relations (4) et (5) donnent

$$\mu^{ps}(B^+(u, e^{t_k})) = e^{\delta_R t_k} \mu^{ps}(B^+(g^{-t_k}u, 1)) \geq e^{\delta_R t_k} \inf_{w \in \Omega \cap C_0} \mu^{ps}(B^+(w, 1)) \rightarrow +\infty.$$

On déduit du fait ci-dessus que le reste $R(B, T, r)$ tend vers 0 quand $r \rightarrow \infty$. Comme les moyennes sont à support dans Ω , on peut se restreindre aux boîtes B telles que pour



tout $t \in T$, $P_t \cap \Omega$ est non vide. Mais comme la mesure $\mu_{H^+}^{ps}$ a pour support $H^+ \cap \Omega$, ceci implique qu'on peut supposer

$$0 < \inf_{t \in T} \mu^{ps}(P_t) \leq \sup_{t \in T} \mu^{ps}(P_t) < +\infty.$$

Ces inégalités montrent que si la suite $(M_{r_n, u})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une mesure m , alors la suite de mesures $\nu_{T^n}^{r_n}$ converge aussi vers une mesure ν_T pour la topologie faible de T . Ceci définit une mesure transverse $\nu = \{\nu_T\}$, et le fait que μ^{ps} soit un système de Haar implique alors que la mesure m est de la forme $m = \nu \circ \mu^{ps}$.

Pour démontrer le lemme, il reste à vérifier que la mesure transverse $\nu = \{\nu_T\}$ ainsi définie est invariante par holonomie. Pour tout $r > 0$ et toute application d'holonomie $\zeta : T \rightarrow T'$ entre deux transversales T et T' d'une même boîte B , toujours parce que le feuilletage est de dimension 1 et les boules sont connexes, on a

$$\#(T \cap B^+(u, r)) \triangle \zeta^{-1}(T' \cap B^+(u, r)) \leq 2.$$

On en déduit que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \nu_T^r(T \cap B^+(u, r) \triangle \zeta^{-1}(T' \cap B^+(u, r))) = 0.$$

Ceci prouve bien que les valeurs d'adhérence de $\nu^r = \{\nu_T^r\}$ sont invariantes par holonomie. \square

Démonstration du lemme 2.6: L'argument est repris de [2]. Considérons une limite vague m de $(M_{r_n, u})$ quand $n \rightarrow +\infty$, et supposons qu'il existe un compact $Q \subset \mathcal{E}_P$ tel que $m(Q) = \beta > 0$. Le théorème 2.4 de non divergence fournit un compact $K = K_{\beta/4, C_0}$ de T^1S tel que pour tout vecteur $v \in \mathcal{E}_R$ basé dans la partie compacte C_0 , et tout $r > 0$, on ait

$$M_{r, v}(K) \geq 1 - \frac{\beta}{4}. \quad (7)$$

Les vecteurs de \mathcal{E}_P sont divergents pour le flot géodésique. Par compacité de Q , on sait que pour tout $t \geq 0$ suffisamment grand, $g^{-t}Q$ ne rencontre pas le compact K . Or $(g^{-t}u)_{t \geq 0}$ revient infiniment souvent dans la partie compacte C_0 ; on peut donc trouver $T > 0$ tel que l'on ait simultanément

$$g^{-T}Q \cap K = \emptyset \quad \text{et} \quad g^{-T}u \in C_0.$$

Comme $g^{-T}Q$ et K sont deux compacts disjoints, on peut trouver une fonction $\psi : T^1S \rightarrow [0, 1]$ continue à support compact valant 1 sur $g^{-T}Q$ et 0 sur K . En particulier, $\psi \geq \mathbf{1}_{g^{-T}Q} = \mathbf{1}_Q \circ g^T$, et on a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n, u}(\psi \circ g^{-T}) = m(\psi \circ g^{-T}) \geq m(Q) = \beta > 0.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$M_{r_n e^{-T}, g^{-T}u}(\psi) = M_{r_n, u}(\psi \circ g^{-T}) \geq \frac{\beta}{2}. \quad (8)$$

Mais $\psi \leq 1 - \mathbf{1}_K$, d'où pour tout $r > 0$, d'après (7) ci-dessus,

$$M_{r, g^{-T}u}(\psi) \leq 1 - M_{r, g^{-T}u}(K) \leq \frac{\beta}{4},$$

ce qui, lorsque $r = r_n e^{-T}$ avec $n \geq N$ est en contradiction avec (8). \square

3 Equidistribution de moyennes généralisées

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des moyennes du même type que précédemment, mais pour une famille de mesures quelconque sur les feuilles.

Soit donc $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$ un système de Haar pour le feuilletage horocyclique de T^1S . Soient $u \in T^1S$ un vecteur, $r > 0$ et $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit alors

$$M_{r, u}^\alpha(\psi) := \frac{1}{\alpha(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi(v) d\alpha(v).$$

Le but de cette section est d'obtenir un théorème d'équirépartition de ces moyennes généralisées analogue au théorème 2.1, la mesure limite étant cette fois la mesure $\mu \circ \alpha$ au lieu de la mesure de Patterson-Sullivan m_{PS} , où μ désigne toujours l'unique mesure transverse invariante à support dans \mathcal{E} telle que $\mu_T(\mathcal{E}_P \cap T) = 0$ pour toute transversale T .

Nous allons déduire du théorème 2.1 le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit S une surface géométriquement finie à courbure au plus -1 dont les cusps vérifient la condition (1). Soit $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$ un système de Haar pour le feuilletage \mathcal{W}^{su} , tel que pour toute feuille H^+ , la mesure α_{H^+} est de support H^+ . Pour tout $u \in \mathcal{E}_R \subset \mathcal{E}$ et toutes fonctions continues à support compact φ et ψ de T^1S dans \mathbb{R} , on a*

$$\frac{\int_{B^+(u, r)} \psi d\alpha}{\int_{B^+(u, r)} \varphi d\alpha} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \alpha)}{\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \alpha)} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$

Démonstration: Il suffit de montrer que pour tout compact $K \subset T^1S$ fixé (suffisamment gros pour que $\mu \circ \alpha(K) \neq 0$), il existe une constante $c(K) > 0$, telle que pour toute fonction $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support dans K , on a

$$M_{r, u}^{\alpha, K}(\psi) := \frac{\int_{B^+(u, r)} \psi d\alpha}{\int_{B^+(u, r)} \mathbf{1}_K d\alpha} \longrightarrow c(K) \int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \alpha), \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

Lemme 3.2 *Si $u \in \mathcal{E}_R$, il existe un compact K_0 de T^1S tel que $\alpha(B^+(u, r) \cap K_0) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.*

Démonstration: Comme $u^- \in \Lambda_R$, l'horocycle $H^+(u)$ revient infiniment souvent dans l'ensemble $\pi^{-1}C_0$ des vecteurs basés dans la partie compacte C_0 de S (théorème 1.3)). Posons $K_0 = \{w \in B^+(v, 1), \text{ avec } v \in \pi^{-1}C_0\}$. Comme $\alpha_{H^+(u)}$ est de support $H^+(u)$, $\inf_{\pi(v) \in C_0} \alpha_{H^+(v)}(B^+(v, 1)) > 0$. Par définition de K_0 , on en déduit $\alpha_{H^+(u)}(K_0) = +\infty$, ce qui donne le résultat voulu. \square

Remarque 3.3 La démonstration du lemme ci-dessus est le seul endroit où on utilise le fait que pour toute feuille H^+ , α_{H^+} est de support tout H^+ . On peut tout à fait se passer de cette hypothèse dès que la conclusion du lemme ci-dessus est vérifiée, ce qui, comme on l'a vu, est le cas de pour la famille de mesures $\{\mu_{H^+}^{ps}\}$.

Il suffit maintenant de montrer (9) pour tout compact K de T^1S qui contient K_0 . Nous supposons que le compact K considéré est propre, i.e. égal à l'adhérence de son intérieur. Considérées comme des probabilités sur K , les moyennes $M_{r,u}^{\alpha,K}$ ont des valeurs d'adhérence pour la topologie faible sur K qui sont des probabilités sur K . Pour toute transversale T au feuilletage qui est incluse dans K et tout $r > 0$, posons

$$\nu_T^{\alpha,r} := \frac{1}{\alpha(B^+(u,r) \cap K)} \sum_{t \in T \cap B^+(u,r)} \delta_t.$$

Pour toute boîte $B = T \times P$ incluse dans K et toute fonction continue ψ à support dans B , écrivons

$$M_{r,u}^{\alpha,K}(\psi) = \int_T d\nu_T^{\alpha,r}(t) \int_{P_t} \psi(v) d\alpha(v) + R(\psi, T, r).$$

Le même raisonnement que dans la preuve du lemme 2.5 donne la majoration

$$|R(\psi, T, r)| \leq \frac{1}{\alpha(B^+(u,r) \cap K)} 2\|\psi\|_\infty \sup_{t \in T} \alpha(P_t).$$

Le lemme 3.2 ci-dessus assure que ce reste tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$.

Ce qui précède montre que toute valeur d'adhérence $m = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n,u}^{\alpha,K}$ est de la forme $\nu \circ \alpha$, avec $\nu = \{\nu_T\}$ une mesure transverse définie sur toutes les transversales T au feuilletage incluses dans K par

$$\nu_T^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_T^{\alpha,r_n}.$$

Rappelons que dans la preuve du lemme 2.5, on avait défini pour tout $r > 0$ une mesure transverse ν^r de façon similaire à $\nu^{\alpha,r}$. On a pour tout $r > 0$ et toute transversale T incluse dans K

$$\nu_T^{\alpha,r} = \frac{\mu^{ps}(B^+(u,r))}{\alpha(B^+(u,r) \cap K)} \nu_T^r.$$

Le théorème 2.1 implique que pour toute transversale T , ν_T^r converge faiblement vers μ_T quand $r \rightarrow \infty$. Le fait que, en restriction à K , $m = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n,u}^{\alpha,K}$ soit une probabilité implique qu'il existe des transversales T incluses dans K , pour lesquelles ν_T^{α,r_n} converge faiblement vers une mesure finie non nulle ν_T . Ces deux faits réunis impliquent la convergence de $\frac{\mu^{ps}(B^+(u,r_n))}{\alpha(B^+(u,r_n) \cap K)}$ vers une constante finie non nulle. Donc ν_T est proportionnelle à μ_T .

Finalement, un argument de normalisation permet d'en déduire que pour toute fonction continue à support dans K ,

$$m(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n,u}^{\alpha,K}(\psi) = \frac{\int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \alpha)}{\int_{T^1S} \mathbf{1}_K d(\mu \circ \alpha)}.$$

Ceci étant vrai pour tout compact K et toute valeur d'adhérence m de $(M_{r,u}^{\alpha,K})_{r>0}$, le théorème en découle. \square

4 Courbure constante : moyennes sur les orbites du flot horocyclique

Soit $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique géométriquement finie, avec \mathbb{H} l'espace hyperbolique. Le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur son fibré tangent $T^1\mathbb{H}$,

on peut donc identifier $T^1\mathbb{H}$ avec $PSL(2, \mathbb{R})$. Dans cette identification, le flot horocyclique $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ agit par multiplication à droite par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$. Ceci revient à déplacer les vecteurs d'une distance t sur l'horocycle fortement instable qu'ils définissent (pour la métrique induite sur l'horocycle par la métrique hyperbolique). Cette action commute à Γ , et passe donc au quotient en le flot horocyclique de T^1S .

La succession d'énoncés ci-dessous permet de voir que le théorème 4.4 est un cas particulier du théorème 3.1 démontré précédemment.

Un calcul simple mais fastidieux donne

Lemme 4.1 *Si $u \in T^1\mathbb{H}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $d_{H^+}(u, h^t(u)) = |t|$.*

Les boules $B^+(u, r)$ sont dans ce cas exactement les segments d'orbites $(h^s(u))_{|s| \leq t}$. D'autre part, par continuité du flot horocyclique, on a facilement :

Lemme 4.2 *La mesure dt sur les orbites du flot horocyclique est un système de Haar pour le feuilletage horocyclique, que l'on notera λ .*

Un calcul simple montre que tous les sous-groupes paraboliques de Γ ont pour exposant $1/2$. En comparant la distance hyperbolique et la distance induite sur un horocycle entre deux points d'un même horocycle, on montre :

Lemme 4.3 *L'hypothèse (1) de croissance des cusps est vérifiée.*

Notre dernier résultat est donc :

Théorème 4.4 *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie. Alors pour tout $u \in \mathcal{E}_R$ et pour toutes fonctions φ et ψ continues à support compact sur T^1S , on a*

$$\frac{\int_{-t}^t \psi \circ h^s(u) ds}{\int_{-t}^t \varphi \circ h^s(u) ds} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \lambda)}{\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \lambda)} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Remarquons que la mesure $m = \mu \circ \lambda$ du théorème ci-dessus est infinie dès que l'ensemble limite Λ_Γ est strictement inclus dans le bord $\partial \tilde{S}$ (i.e. dès que S n'est plus de volume fini).

Références

- [1] Babillot, Martine *On the mixing property for hyperbolic systems* (2002) Israël J. Math. 129, 61-76.
- [2] Bekka, M. Bachir ; Mayer, Matthias *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*. London Mathematical Society Lecture Note Series, **269**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [3] Bowditch, Brian H. *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. Vol 77 n.1 (1995) 229-274.
- [4] Bowen, Rufus ; Marcus, Brian *Unique ergodicity for horocycle foliations*. Israel J. Math. **26** (1977), no. 1, 43-67.
- [5] Burger, Marc *Horocycle flow on geometrically finite surfaces*, Duke Math. J. 61, n.3, (1990) 779-803.
- [6] Candel, Alberto ; Conlon, Lawrence *Foliations. I*. Graduate Studies in Mathematics, 23. American Mathematical Society, Providence, RI (2000).
- [7] Dal'bo, Françoise *Topologie du feuilletage fortement stable*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 981-993.
- [8] Dal'bo, Françoise ; Otal, Jean-Pierre ; Peigné, Marc *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*. Israel J. Math. **118** (2000), 109-124.

- [9] Dani, S. G. *Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces*. Invent. Math. **47** (1978), no. 2, 101–138.
- [10] Dani, S. G. ; Smillie, John *Uniform distribution of horocycle orbits for Fuchsian groups*. Duke Math. J. **51** (1984), no. 1, 185–194.
- [11] Eberlein, Patrick B. *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.
- [E-P] Ellis, Robert ; Perrizo, William *Unique ergodicity of flows on homogeneous spaces*. Israel J. Math. **29** (1978), no. 2-3, 276-284.
- [12] Furstenberg, Harry *The unique ergodicity of the horocycle flow*. Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972 ; in honor of Gustav Arnold Hedlund), pp. 95–115. Lecture Notes in Math., Vol. 318, Springer, Berlin, 1973.
- [13] Hamenstädt, Ursula *A new description of the Bowen-Margulis measure*, (1989) Ergodic Theory and Dynamical Systems, 9, 455-464.
- [14] Hedlund, Gustav Arnold *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. 2 (1936), 530-542.
- [15] Hersonsky Sa'ar ; Paulin, Frédéric *On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces*, Comment. Math. Helv. **72** (1997) 349-388.
- [16] Hopf, Eberhard. *Ergodentheorie*, Springer, Berlin (1937).
- [17] Ratner, Marina *Raghunathan's conjectures for $SL(2, \mathbb{R})$* . Israel J. Math. **80** (1992), no. 1-2, 1–31.
- [18] Roblin, Thomas *Ergodicité et unique ergodicité du feuilletage horosphérique, mélange du flot géodésique et équidistributions diverses dans les groupes discrets en courbure négative*. (2001) Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes.
- [19] Schapira Barbara, *On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold* (2002) A paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- [20] Schapira Barbara, *Lemme de l'ombre et non divergence des horocycles d'une variété géométriquement finie* (mai 2003) Prépublication du MAPMO.
- [21] Sullivan, Dennis *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions* Publ. Math. I.H.E.S **50** (1979) 171-202.
- [22] Sullivan, Dennis *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math., (1984) 259-277.